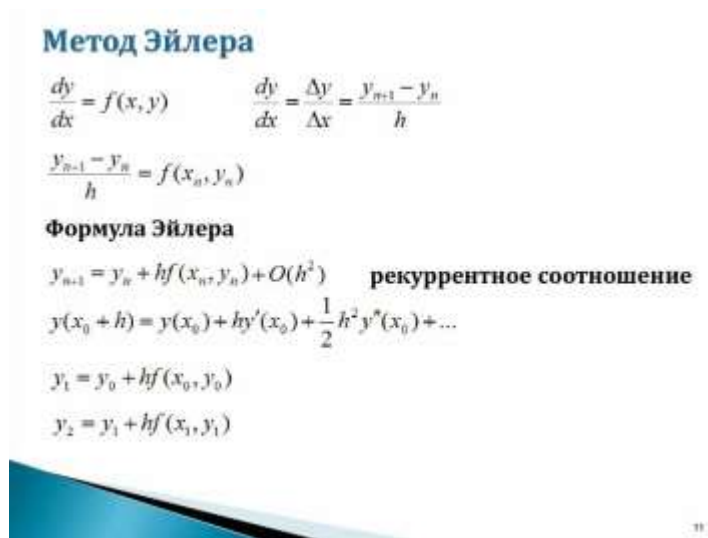


Метод Эйлера

Метод Эйлера — термин, который означает простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление».

Метод Эйлера — явный, одношаговый метод первого порядка точности. Основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией — так называемой ломаной Эйлера.



Метод Эйлера

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$$
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$$

Формула Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2) \quad \text{рекуррентное соотношение}$$
$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_0) + \dots$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

Описание

Идея метода: фрагмент графика искомой функции заменяется ломаной линией, состоящей из участков касательных.

Расчётная формула: $y_{i+1} = y_i + h \times f(x_i, y_i)$, $x_{i+1} = x_i + h$, ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$).

Важно: метод Эйлера не является итерационным — на каждом шаге выполняются действия одного типа, не происходит последовательного приближения уточнения решения.

Погрешности

Метод Эйлера характеризуется высокой погрешностью. Некоторые особенности:

- На каждом шаге допускается локальная погрешность по отношению к точному решению, график которого проходит через крайнюю левую точку отрезка.

- На каждом шаге, начиная со второго, накапливается глобальная погрешность — разность между численным решением и точным решением исходной начальной задачи (а не локальной).

Точность метода повышается при уменьшении размера шага вычислений h . Однако чрезмерно малое значение h приводит к снижению производительности из-за увеличения количества вычислений: чем меньше шаг, тем больше итераций необходимо выполнить.

Модификации

Для повышения точности решения дифференциальных уравнений существуют модификации метода Эйлера, например:

- Явный метод Эйлера-Коши (уточнённый метод Эйлера) — применяется для повышения точности расчёта.

- Усовершенствованный метод Эйлера — отрезки должны быть параллельны касательным, которые проведены к графику функции не на левых краях, а «посерединке» интервалов разбиения, что улучшает качество приближения.

- Неявный метод Эйлера — значение функции f вычисляется на $i+1$ -м шаге, для нахождения приближённого значения искомой функции на $i+1$ -м шаге необходимо решить нелинейное уравнение.

Применение

Метод Эйлера используется в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений, задач вариационного исчисления и других математических проблем. Для практического нахождения решений

задачи Коши метод Эйлера применяется редко из-за невысокой точности и вычислительной неустойчивости.

Идеи, положенные в основу метода Эйлера, являются исходными для ряда других методов